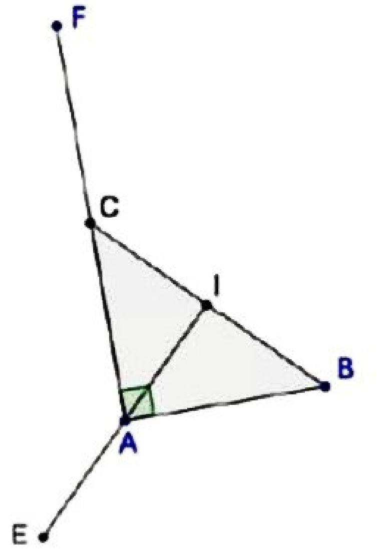
Exercice 3 (7 points)

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et I le milieu de $[BC]$. E est le symétrique de I par rapport à A et F le symétrique de A par rapport à C. (voir figure)

On pose $AB = a$, $\quad a > 0$.



1. a) Calculer AI en fonction de a.

   b) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}$.

   c) Montrer que les droites (FI) et (BE) sont perpendiculaires.

2. Soit l'ensemble $\Delta = \left\{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BE} = -a^2\right\}$.

   a) Montrer que $I \in \Delta$.

   b) Déterminer l'ensemble Δ.

3. Soit l'ensemble $\mathscr{C} = \left\{M \in P \text{ tel que } AM^2 - 2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI} = 0\right\}$.

   a) Soit D le point tel que $ABDC$ est un carré, écrire D comme barycentre des points A et I.

   b) Montrer que $M \in \mathscr{C}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}) = 0$.

   c) Montrer alors que $\mathscr{C}$ est un cercle qu'on précisera.

Exercice 4 (5 points)

(A) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x^2 - x^3}$

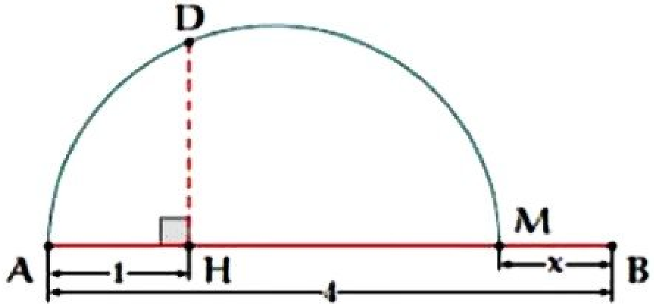
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. a) Justifier que pour tout réel x on a : $3x^2 - x^3 = 4 - (x-2)^2(x+1)$.

   b) En déduire que f admet un maximum sur $[0;3]$ que l'on précisera.

(B) Dans la figure ci- contre :

- $[AB]$ est un segment de longueur 4.
- H est un point de $[AB]$ tel que $AH = 1$.
- M est un point de $[HB]$ tel que $BM = x$.
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[AM]$.
- La perpendiculaire a (AB) en H coupe Γ en D



1. a) Justifier que $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AM} = AD^2$

   b) En déduire que $AD = \sqrt{4-x}$

   c) Calculer alors DH

2. Déterminer alors la position du point M pour que l'aire du triangle BMD est maximale.

Exercice 1 *(3 points)*

Pour chacune des questions suivantes une seule de trois réponses proposées est exacte.

Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre qui correspond

1. Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{|x+2|-|x-2|}$ Le domaine de définition de f est :

a) $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$	b) $]-2;2[$	c) $\mathbb{R}^*$

2. La fonction f est :

a) Paire	b) Impaire	c) Ni paire ni impaire

3. A et B deux points du plan et I le milieu de $[AB]$.

a) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=0$	b) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=AI^2$	c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=-\dfrac{AB^2}{4}$

4. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

a) La droite (AB)	b) La médiatrice de $[AB]$	c) le Cercle de diamètre $[AB]$

Exercice 2 *(5 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

1. a) Vérifier que la fonction f est paire puis interpréter graphiquement.
   b) Montrer que pour tout réel x de $[0,+\infty[$ on a $f(x)\leq\dfrac{1}{2}$.
   c) En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$.
4. Pour tout réel x, on pose : $g(x)=f(x)-x^2$.
   a) Prouver que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.
   b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $[0,1]$ une solution α.

Ex 2

Dvr de Cntrl N°3

a) $D_f = \mathbb{R}$ ①

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-x) \in \mathbb{R} \Rightarrow (-x) \in D_f$ ($\in D_f$)

$f(-x) = f(x) \longrightarrow f$ est paire

graphiquement l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe de f dans un repère orthogonal

b) $\forall x \in [0 ; +\infty[$

$x^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq 1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} + 1 \geq 2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} \geq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) \geq \dfrac{1}{2}$

c) • $\forall x \in [0 ; +\infty[$; $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ ①

• $\forall x \in]-\infty ; 0]$ on a $(-x) \in [0 ; +\infty[$

D'après ① on a $f(-x) \leq \dfrac{1}{2}$

donc $\forall x \in]-\infty ; 0]$ on a $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ ②

(car f est paire donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$)

① + ② $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$

or $f(0) = \dfrac{1}{2}$

donc $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \dfrac{1}{2} = f(0) \end{cases}$

$\Rightarrow f$ admet un maximum $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$ en 0

2) La fct $x \longmapsto x^2 + 1$ polynome continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2 + 1 \geq 0$

donc la fct $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc la fct $x \longmapsto \sqrt{x^2+1} + 1$ est continue ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

donc la fct $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$

③ soit a et b 2 réels de $[0 ; +\infty[$ tq $a < b$

on a $0 \leq a < b$

$\Rightarrow a^2 < b^2$

$\Rightarrow a^2 + 1 < b^2 + 1$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+1} < \sqrt{b^2+1}$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+1} + 1 < \sqrt{b^2+1} + 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}+1} > \dfrac{1}{\sqrt{b^2+1}+1}$

$\rightarrow f(a) > f(b)$

donc f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$

4) a) Soit a et b 2 réels de $[0 ; +\infty[$ tq $a < b$

$\Rightarrow 0 \leq a < b$

$\Rightarrow a^2 < b^2$

$\Rightarrow -a^2 > -b^2$

donc la fct $x \longmapsto -x^2$ est strictement ↘ sur $[0 ; +\infty[$

on a $\begin{cases} f \text{ est strictement décroissante sur } [0 ; +\infty[\\ \text{et} \\ \text{la fonction } x \longmapsto -x^2 \text{ est strictement décroissante sur } [0 ; +\infty[\end{cases}$

donc la fct $x \longmapsto f(x) + (-x^2)$ est strictement ↘ sur $[0 ; +\infty[$

donc la fct $g : x \longmapsto f(x) - x^2$ est strictement ↘ sur $[0 ; +\infty[$

b) $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [0 ; 1] \text{ (car elle est sur } \mathbb{R}) \\ \text{et} \\ x \longmapsto -x^2 \text{ polynome continue sur } [0 ; 1] \text{ (car elle est sur } \mathbb{R}) \end{cases}$

donc la fct $x \longmapsto f(x) - x^2$ est continue sur $[0 ; 1]$

Comme somme de 2 fonctions continues sur $[0 ; 1]$ donc $\boxed{g \text{ est continue sur } [0 ; 1]}$ ①

$$\begin{cases} g(0) = f(0) - 0^2 = \frac{1}{2} \\ g(1) = f(1) - 1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - 1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\underbrace{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}_{1}} - 1 \end{cases}$$

$= \sqrt{2} - 2$

donc $\boxed{0 \text{ est compris entre } g(1) \text{ et } g(0)}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0;1]$ au moins une solution

or g est strictement décroissante sur $[0;1]$

donc l'équation $g(x)$ admet dans $[0;1]$ une seule solution α

Ex 4 :

A)

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 - x^3 \geq 0\}$

$3x^2 - x^3 = x^2(3 - x)$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x^2-x^3$		$+$	0	$+$	0	$-$	

$D_f =]-\infty; 3]$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$4 - (x-2)^2(x+1) = 4 - (x+1)(x^2 - 4x + 4)$

$= \cancel{4} - x^3 + 4x^2 - \cancel{4x} - x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4}$

$\boxed{= 3x^2 - x^3}$

b) $\forall x \in [0;3]$ on a :

$(x-2)^2(x+1) \geq 0$

$\Rightarrow -(x-2)^2(x+1) \leq 0$

$\Rightarrow 4 - (x-2)^2(x+1) \leq 4$

$\Rightarrow 0 \leq 3x^2 - x^3 \leq 4$

$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - x^3} \leq 2$

$\Rightarrow f(x) \leq 2$

or $f(2) = 2$

donc $\forall x \in [0;3]$:

$f(x) \leq f(2)$ et $f(2) = 2$

donc f admet un maximum sur $[0;3]$ égal à 2 en $x_0 = 2$

(B)

1) a) $\vec{AD} \cdot \vec{AM} = \vec{AD} \cdot \vec{AD}$ (car $D \in (\Gamma)$ le demi cercle de droite $[AM]$ donc le triangle (ADM) est rectangle en D donc D est le projeté orthog de M sur (AD))

$= AD^2$

b) $\vec{AD} \cdot \vec{AM} = \vec{AH} \cdot \vec{AM}$ (car H est le projeté ortho de D sur $[AM]$)

$= AH \times AM$

$= 1 \times (4 - x)$

$= 4 - x$

or $\vec{AD} \cdot \vec{AM} = AD^2$

donc $AD^2 = 4 - x$

$\Rightarrow AD = \sqrt{4 - x}$

c) AMD est un triangle rectangle en D et H est le proj orthog de D sur $[AM]$

donc

$DH^2 = HA \times HM$

$= 1 \times (3 - x)$

$= 3 - x$

$\Rightarrow DH = \sqrt{3 - x}$

(2) soit $A(x)$ l'aire du triangle MBD

on a H le projeté ortho de D sur $[MB]$

donc $A(x) = \frac{BM \times DH}{2}$ et $x \in [0;3]$

$= \frac{x \times \sqrt{3-x}}{2}$ et $x \in [0;3]$

$= \frac{\sqrt{x^2} \times \sqrt{3-x}}{2}$ et $x \in [0;3]$

$= \frac{\sqrt{x^2(3-x)}}{2} = \frac{\sqrt{3x^2 - x^3}}{2} = \frac{1}{2} f(x)$

$S(x)$ est maximale

$\Rightarrow f(x)$ est maximale

$x \in [0;3]$

donc $x = 2$ (car f admet un max sur $[0;3]$ en $x_0 = 2$) $\Rightarrow M = A * B$